

APUNTES PARA UNA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

DOCUMENTO 2

“SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO Y LAS PRIMERAS OPERACIONES. EL TEXTO LIBRE EN MATEMÁTICAS”

INTRODUCCIÓN.-

En el capítulo anterior fundamentamos y construimos una primera propuesta global que planteaba que el cálculo aproximado en sus diferentes formas de jugar a acertar, estimar o aproximar debe preceder y presidir toda actividad de cálculo en nuestras aulas y que consecuentemente pretendía generar y desarrollar en los alumnos el hábito y la actitud de que ante cualquier operación de cálculo, incluyendo las actividades de numeración y la resolución de problemas, lo primero que hay que hacer es darle unas cuantas vueltas en la cabeza para ver cuál más o menos va a ser el resultado, para después, una vez realizado el algoritmo, compararlo con el que habíamos previsto. Porque como decíamos, es en ese diálogo entre ambos números en el que se va produciendo el acercamiento progresivo entre nuestro cálculo aproximado y el exacto, donde se va desarrollando su capacidad de calcular en relación con el pensar.

Pero decíamos también que el cálculo aproximado es un ámbito de aprendizaje un tanto ignorado en nuestras programaciones y en los libros de texto. De ahí que planteáramos el completar ese vacío con un amplio abanico de actividades concretas a desarrollar en nuestras aulas. Es lo que trataremos de hacer a continuación

1.-SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DEL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE NÚMERO.

1.1.- Contar... y también medir.

Probablemente la actividad de **manipular y contar** que se produce habitualmente en nuestras aulas sea la actividad más relevante en la construcción del aprendizaje del concepto de número. Así, en las aulas de infantil y primer ciclo de Primaria se hacen muchas actividades de contar: se cuentan los lápices del lapicero, los cuadernos de encima de la mesa del maestro, los libros de la estantería, los alumnos que han venido a clase; también garbanzos, botones, fichas, y cualquiera clase de objetos. Se cuenta además de uno en uno, de dos en dos, hacia adelante, hacia atrás, etc. Y se cuenta cantando... Quizás porque como dijo el poeta: entre *contar* y *cantar* sólo hay una vocal de diferencia...

Quizás lo primero que haya que decir es que todas esas actividades son válidas. Me gusta reafirmarlo porque muchas veces nos sentimos deslumbrados por actividades novedosas que parecieran presentarse como la solución mágica a los problemas de aprendizaje de nuestros alumnos. Así que repito, sin complejos: todas esas actividades de contar desde la manipulación de materiales concretos son válidas. Aunque me gustaría plantear sobre ellas tres cuestiones.

La primera es que todas esas actividades de contar deben -subrayo lo de deben- plantearse desde nuestra propuesta metodológica de: *Vamos a jugar a acertar...* Lo hemos visto ya en el capítulo anterior en la actividad de contar los lápices del lapicero y lo podemos ver contando los libros de la estantería, fichas, botones, o garbanzos y habas; y siempre desde ese *Vamos a jugar a acertar, a ver quién acierta*. Es evidente que con este planteamiento evitamos que la actividad de contar se pueda convertir en una actividad mecánica y rutinaria introduciendo una actividad que, aunque mínima, ya es del pensar. Parece mentira que este simple cambio en el planteamiento de la actividad pueda generar tanta actividad mental por parte del alumno, porque al principio es posible que diga un número cualquiera sólo a ver si acierta; pero poco a poco lo iremos viendo afinando su mirada y su pensamiento e ir corrigiendo esa primera actitud y perfilando su respuesta en un ejercicio encomiable de estimación y aproximación que merecería detenernos en él un momento. Pensemos en el esfuerzo mental -la gimnasia mental- de búsqueda del número, de descartes de otros, de errores, de ¡*Uy, por poquito!* Y en definitiva todo ese proceso que es de *reflexión* y de *fracaso* en el sentido machadiano. Y que todo ello se ha introducido simplemente proponiendo *vamos a jugar a acertar...*

La segunda cuestión que quería plantear se refiere a que en todas las actividades de contar objetos se debe introducir en un momento determinado lo que podríamos llamar la organización geométrica del material. Imaginemos que cogemos, por ejemplo, un conjunto de 12 botones y vamos formando una fila de doce, y después una fila de 10 y otra de 2; o una de 7 más otra de 5, o dos filas de seis, tres filas de cuatro, etc. La organización geométrica del material está en la base de un aprendizaje del concepto de número asociado, no a una única forma derivada de un conjunto amorfo de elementos que el alumno cuenta de uno en uno, sino a una forma más amplia relacionada con esas formas geométricas de filas y columnas y que relacionan el número con las primeras operaciones de suma, resta o multiplicación. Valga como ejemplo que el alumno que aprende el número de esta forma no va a tener dificultad para más adelante por escrito descomponerlo en sus múltiples formas aritméticas: $12 = 10+2 = 7+5 = 2 \times 6 = 2 \times 5 + 2 \dots$ porque él ya lo ha hecho antes manipulando el material.

La organización geométrica del material se puede utilizar también para que el alumno intuya lo que podríamos llamar la secuenciación lógica de la numeración. Ello se puede hacer fácilmente utilizando las regletas de Cuisenaire formando las típicas escaleras que comienzan con la regleta blanca del 1 y continúan debajo sucesivamente con la roja del 2, la verde claro del 3, la rosa del 4, etc. Y donde el alumno puede ver que al pasar de 10 la misma secuencia se repite en 11, 12, 13, 14 etc. En cualquier caso, aunque el uso de las regletas es muy recomendable en el aula, para esta actividad concreta su función puede ser sustituida por el papel cuadriculado formando el mismo tipo de escaleras y coloreándolas igualmente, de manera que el alumno puede ver de forma clara la repetición secuenciada de los números.

La tercera cuestión que quería plantear se refiere a que es verdad que en nuestras aulas se hacen muchas actividades de contar..., pero muy pocas de medir. Es muy importante que los alumnos hagan actividades de medida a la par que hacen actividades de contar. Desde nuestro planteamiento es muy importante que los alumnos de infantil -con una regla del 0 al 10- y primero -con la regla de 0 a 20 ó 30- tengan su propia regla y se acostumbren a medir y siempre con nuestra propuesta del *vamos a jugar a acertar. A ver quien acierta...* cuánto mide un bolígrafo, lápiz, la altura de un cuaderno, libro, o el propio dedo del alumno en infantil.

Es muy conveniente tener en cuenta que tanto el contar como el medir son actividades que se plantean para aprender los números; es decir: no hay que esperar a que los alumnos aprendan los números para contar y medir, sino al contrario: contar y medir son dos actividades con las que los alumnos construyen su aprendizaje de los números. Incluso podríamos añadir que en el caso de la medida su aportación al aprendizaje del concepto de número es mayor que la del contar. Me explico: todos sabemos que el objetivo final del aprendizaje del concepto de número es que los alumnos sepan secuenciarlos y situarlos en la recta numérica, aprender que unos números van antes y otros después, cuál es el anterior y cuál el siguiente, o cuál es la decena más próxima, etc. Pues bien, el alumno que utiliza la regla para medir y juega a acertar la medida, a la vez que mide está adquiriendo fácilmente todos esos aprendizajes que caracterizan a este tipo de ejercicios en la recta numérica. Digamos que mientras que el alumno que aprende a contar tiene que intuir después la recta numérica para situarse en ella, el alumno que mide la tiene delante de sus ojos porque la recta numérica coincide con su propia regla de medir. O lo que es lo mismo, cuando un alumno juega a acertar la medida de un objeto y dice un número, al comprobarlo con su regla está observando los números escritos en ella y situando el número que ha pensado entre ellos.

Por último, añadir a todo esto que la experiencia de la medida proporciona al alumno un aprendizaje más allá del referido en relación con el material contable. El alumno cuando mide su dedo puede observar que no mide exactamente tres o cuatro, sino que puede ser un poco más de tres, casi cuatro, etc. introduciendo intuitivamente la ampliación del concepto de número a los decimales.

1.2.- Jugar a acertar el número por acotación.

Probablemente ésta es la actividad por excelencia en el aprendizaje del concepto de número y la que culmina todo el proceso. Digamos que cuando el alumno domina el juego de acertar un número por acotación, está ya en condiciones de abordar todo tipo de ejercicios en la recta numérica. A mí, personalmente, me gustaba en los primeros meses de primero de Primaria, hacer esta actividad en los

últimos diez o quince minutos antes de terminar la jornada. Les decía a los alumnos que recogieran todo de encima de la mesa y después escribía en un papel un número del 0 al 30 (por ejemplo) que ellos tenían que acertar; y mientras los alumnos iban diciendo un número, yo sólo decía *más o menos* según sus respuestas, hasta que siempre había un alumno que lo acertaba. Es bueno recordar que este es un juego de acertar; de manera que siempre hay alumnos que cuando su compañero anterior ha dicho *15* -por ejemplo- y el maestro ha dicho *más*, él puede decir *ocho*... ¿Qué hacer entonces? Creo que lo más conveniente en estos casos es aplicarse al maestro un principio metodológico excelente que podríamos denominarlo simplemente “morderse la lengua”. No sólo para evitar “chillarle” al niño -ganar no nos faltan- sino también para evitar explicar. Así que lo recomendable es que el maestro diga simplemente *más* y el juego continúe, a la vez que anota en su memoria que ese niño no tiene consolidado el concepto de número y que tendrá que trabajar con él el mismo juego pero con los números del 0 al 10, por ejemplo.

Cuando el maestro considera que más de la mitad de los alumnos ya dominan el juego, entonces planteará un día el formar dos equipos: *El equipo A que soy yo. Y el equipo B que sois todos vosotros. Así que uno contra todos los demás. Pero tened cuidado que os puedo ganar porque a este juego yo siempre tengo mucha suerte...*

Me gustaría hacer un breve paréntesis para hablar de la importancia de la teatralización en la didáctica, al incorporar el maestro al juego la palabra suerte y repetirla muchas veces. Así que empieza el juego como lo hemos visto hasta ahora; y el alumno que acierta el número se encargará de escribir en la pizarra, a la vista de todos, el número que el maestro, que está de espaldas a la pizarra, tiene que acertar. Como el maestro utiliza de estrategia la acotación por mitades lo acierta pronto y dice: *¿no os lo dije? Yo es que a este juego siempre tengo mucha suerte...* Es evidente que al cabo de unos días después de haber oído teatralizar al maestro repetidamente eso de que tiene mucha suerte, algunos alumnos empezarán a sospechar que no es cuestión de suerte, sino que el maestro debe tener un truco y comenzarán a indagar en cuál puede ser...

Añadir también que este juego tiene una tercera fase en la que los alumnos ya juegan por parejas y no necesitan del maestro. Es la culminación que toda actividad de aula -no sólo ésta- debe tener en su evolución y desarrollo; es decir: que los alumnos jueguen solos, sean autónomos y el maestro se dedique a cosas como, por ejemplo, pasear entre los alumnos y observar y comentar con ellos cosas del juego; cosas, todas ellas muy sanas y recomendables...

Por supuesto no hace falta añadir que este mismo juego que hemos situado en el primer trimestre de Primaria, puede realizarse de la misma manera ya desde Infantil con los números del 0 al 10 por ejemplo. O ampliarse en cursos superiores con los números del 0 al 1.000, o al 10.000 o a 1.000.000. En todos los casos, el alumno que aprende este juego, está preparado para abordar todas esos ejercicios en la recta numérica que tanto abundan en los libros de texto.

2.- SOBRE LA INTRODUCCIÓN DE LAS OPERACIONES MATEMÁTICAS COMO CONCEPTOS/HERRAMIENTAS. LA SUMA Y LA RESTA.

Con este título pretendemos fijar desde el comienzo como principio metodológico el que las operaciones matemáticas -todas- se aprenden usándolas, por lo que proponemos que ese uso sea lo más diverso posible, de manera que se coloque al alumno en diferentes y variadas situaciones de aprendizaje. Como siempre, nos vamos a detener más en los primeros cursos porque entendemos que ahí está la base sobre la que queremos construir. De ahí que le dediquemos un tiempo mayor al aprendizaje de la suma y la resta, aunque los mismos principios metodológicos sean aplicables al resto de operaciones.

1ª FASE: El aporte de experiencias diversas. Importancia de la manipulación del material.

a) Experiencias de juntar/quitar.-

- **La introducción de la suma y la resta a partir de problemas.**

Imaginemos, también esta vez, como si de una cámara que estuviera grabando, o como si de un relato bien construido, se tratara, que el maestro ha comenzado su clase diciendo a sus alumnos que recojan

todo de encima de la mesa y que saquen la caja con material contable: botones, fichas de colores, tapones de botellas, garbanzos o habas. Después les plantea un problema de sumar muy fácil, por ejemplo: *En un árbol hay 5 pájaros y vienen 3 más.* Y el maestro escribe en la pizarra $5+3 =$, mientras dice: *5 pájaros más 3 pájaros*, a la vez que va señalando los números que ha escrito.

Es evidente que ahora vendría la pregunta del problema y que si yo preguntara aquí ahora cual sería esa pregunta, muchos seguramente contestarían con la pregunta más o menos convencional de *¿cuántos pájaros hay en total?* o *¿cuántos pájaros hay en el árbol ahora?*, olvidando lo que ya planteamos en el primer día acerca de que hay muchas formas de preguntar y que algunas tras su apariencia inocente esconden problemas de inclusión entre nuestros alumnos. Cuando muchas veces hablamos de lo tozudas y resistentes que suelen ser las ideas previas de los alumnos y sobre cuán difícil es cambiar hábitos y actitudes en ellos, se nos olvida que entre nosotros los adultos también existen esas ideas previas y esas actitudes difíciles de cambiar. Las preguntas convencionales de los problemas llevan mucho tiempo instaladas en nuestras aulas generando un tipo de cultura muy arraigada. ¿En cuántos problemas de nuestros libros de texto encontraríamos que la pregunta se hace desde esta perspectiva que prioriza el cálculo aproximado? ¿Cuántos de ellos expresan la pregunta en términos de *“Antes de coger el lápiz y empezar las cuentas piensa cuánto más o menos va a dar. Después calcula el resultado y compáralo con lo que habías pensado?”*...

Sin embargo, nosotros ya sabemos que el maestro no planteará esas preguntas convencionales que están en la mente de todos, sino que propondrá nuestro ya célebre: *Vamos a jugar a acertar. A ver quien acierta* cuántos pájaros habrá en total. Y dejará -también lo sabemos- un poco de tiempo para que los alumnos piensen y para que levanten la mano y digan el número por el que han apostado y se genere un cierto debate. Después lo que toca -también lo sabemos- es: *Vamos a comprobar.* Y los alumnos ogerán de la caja o de la bolsa cinco botones, habas, garbanzos o tapones de plástico de los tetrabriks, imaginando que esos son los pájaros que había en el árbol; y después cogerán tres más por los pájaros que han llegado después; y los juntarán y contarán para comprobar el resultado y compararlo con el número por el que habían apostado. Por último, se comentará algo sobre los que acertaron, o estuvieron cerca, o muy lejos de acertar; y todo ello evitando entrar en valoraciones porque lo que debe primar no es el cálculo exacto, sino que éste era un juego de acertar... Y no hay tiempo para más, porque a pesar de que llevamos ya un rato hablando del problema, éste debe ser corto y el tiempo hay que aprovecharlo para plantear otros problemas que serán muy parecidos al anterior...

Algunas cosas me gustaría comentar sobre esta *manera de hacer* –me gusta más emplear estas palabras que hablar de metodología- del maestro. En primer lugar, decir que las actividades de este tipo, como los problemas, o la redacción, o el dictado, que tienen un largo recorrido y pertenece a varios cursos, necesitan de un “ritual” al que los alumnos deben acostumbrarse. En el caso de los problemas ese ritual contempla la idea de que todo problema tiene tres formas: La forma completa, la simplificada y su expresión matemática. Esa es la razón por la que el maestro escribe en la pizarra: $5 + 3 =$. De modo que los alumnos relacionen el problema con su expresión matemática, y también porque en los sucesivos problemas que vendrán a continuación, el maestro puede ya prescindir del problema completo y preguntar directamente su forma simplificada, o su expresión matemática: *A ver quien acierta cuánto será 6 pájaros más 3 pájaros;* y de esta forma ahorrar tiempo y así poder plantear más problemas en cada sesión...

En segundo lugar decir que la estrategia de introducir una operación a partir de un problema no supone ninguna novedad; está en todos los libros de texto y hay una cierta unanimidad sobre ello. La novedad de nuestra *manera de hacer* es que la operación no se introduce con un problema sino con muchos, de manera que en una sección de unos diez o quince minutos pueden caber perfectamente 10 o 12 problemas de este tipo. Esta diversidad nos permite también una evolución en la propia actividad, de manera que el maestro a partir del tercer o cuarto problema puede introducir la resta para después ir alternando un problema de sumar con otro de restar y presentar ambas actividades como muy cercanas y complementarias. Y también a partir del quinto o sexto problema el maestro puede introducir eso de: *A ver un voluntario que diga el siguiente problema...* para aplicar eso que venimos repitiendo sobre el protagonismo de los alumnos, de manera que la actividad tienda al ejercicio individual de

que sea el propio alumno quién se las proponga a sí mismo convirtiendo la actividad en autoaprendizaje. Otro principio metodológico de los que el maestro debe escribir en su pizarra de corcho junto a su mesa para tenerlo siempre presente.

En tercer lugar, destacar el papel, tan importante como incuestionable, que juega la manipulación del material en el aprendizaje de los conceptos matemáticos en edades tan tempranas. Por ello esta es una fase en la que es importante no tener prisas, incluso es recomendable que las actividades terminen con el alumno jugando libremente con el material. También es interesante introducir en un momento determinado la sustitución del material contable por el uso de los dedos -un material “tan a mano”- y posteriormente -como ya veremos- la calculadora. En cualquier caso, no olvidemos que el uso del material, así como los dedos, las regletas o la calculadora se debe entender siempre a la hora de comprobar, y que lo que debe presidir y preceder la actividad es siempre nuestro *jugar a acertar*. Por lo demás sólo incidir en la idea de que toda operación matemática es un concepto-herramienta y que lo importante es promocionar su uso: cuánto más se use una operación, mejor se aprende.

- **Juego de sumar y restar con las cartas de los números.-**

Imaginemos que la maestra de Infantil ha planteado el juego de sumar repartiendo las cartas con los números entre el pequeño grupo de alumnos del “rincón de matemáticas”, de modo que a cada uno le toca un número diferente. Así, el alumno que empieza el juego enseña su carta, por ejemplo el 4, y elige sumarlo con otro compañero que tiene en su carta por ejemplo el 2. Después aplicamos el *vamos a jugar a acertar* y *vamos a comprobar*, y se juntan los tapones y se dice: *cuatro más dos son seis*. Después el niño que tenía la tarjeta del dos coge dos tapones y elige con qué compañero quiere juntarlos y así sucesivamente. Incluso, la maestra puede introducir la variable de que todos los alumnos jugarán ese día con ella y le ha tocado una carta fija, el 3, y que todos los niños uno a uno sumen su tarjeta con la de ella, generándose así operaciones de la tabla de sumar + 3. Evidentemente, estos juegos de cartas con los números pueden ser utilizados también para la resta.

b) Experiencias de contar/descontar.

- **El tren de los números.**

Como sabemos la suma y la resta no sólo comprende los conceptos y experiencias de juntar y quitar, sino también los de contar y descontar. Así que imaginemos ahora que en el recreo de infantil hay pintado **el tren de los números**, con sus dos raíles que curvean por el patio y que en cada traviesa están los números, por ejemplo del 0 hasta el 20; y el maestro ha planteado un juego de “sumar 3”. Así cada niño se sitúa en el número que le ha tocado según su carta y da un salto de 3 hacia delante. Si el maestro acostumbra a sus alumnos a que antes de comprobar donde llegarán tiene que jugar a acertar, tendremos también una magnífica actividad de introducir la suma en infantil, no contando desde el uno sino desde cualquier número como hacen los alumnos que suman con los dedos. Si añadimos a estas actividades las correspondientes a la resta tendremos una actividad del contar/descontar introductorio del mismo tipo de ejercicios en la recta numérica.

- **La regla de medir y la recta numérica.**

Un paso más en la evolución de esta misma actividad de contar/descontar a partir de un número, puede hacerse en la propia **regla de medir**, o escribiendo los números del 0 al 30 colocados encima de la pizarra, para plantear el mismo tipo de ejercicios en **la recta numérica** e ir proponiendo saltos para delante (sumar) y para atrás (restar) desde cualquier número. Y como siempre presidido y precedido de nuestra: *Vamos a jugar a acertar. A ver quién acierta*. Por ejemplo: *Vamos a jugar a acertar: Estamos en el 8 y sumamos 5. A ver quién acierta dónde llegaremos*.

c) Sobre el uso del material

- **El uso de los dedos como material contable.**

Dentro del material para el aprendizaje de la suma y la resta, merece un papel destacado el uso de los dedos. Por un lado está el que es un material muy a mano -nunca mejor dicho-; y por otro lado está el destacado papel que ha desempeñado tradicionalmente en nuestras aulas en relación con estos aprendizajes. No olvidemos que una gran mayoría de los alumnos en todas las épocas probablemente hayan aprendido a sumar y restar contando con los dedos.

Digamos que los dedos pueden usarse para sumar y restar también en las dos formas que ya hemos visto. Es de destacar que si usamos los dedos para enseñar a “juntar y quitar” es interesante utilizar los dedos de los pies; como por ejemplo, al “sumar buscando 10”, por ejemplo en la suma de 8 (5 de un pie y 3 en una mano) + 7 (5 del otro pie y 2 en la otra mano) para resolverlo desde el 10 (de los dos pies) + 3 + 2; $10 + 5 = 15$.

En cuanto a contar/descontar con los dedos, reseñar lo que ya vimos en el caso de contar de uno en uno, en el sentido del riesgo de convertirse en una actividad mecánica y repetitiva que podemos corregir desde nuestro *vamos a jugar a acertar*

- **Las regletas de Cuisenaire y el papel cuadriculado.**

Probablemente, las regletas de Cuisenaire pueda considerarse el material más interesante en la didáctica del Cálculo en estos primeros años. Su consideración de material continuo permite que el alumno resuelva la unión de regletas (suma), a la que los alumnos suelen llamar trenes, o la comparación (resta), no contando de uno en uno como con los dedos, sino resolviéndolo desde el medir con la mirada y buscar la regleta que corresponde a dicha suma o la que falta en el caso de la resta. Por otra parte, el uso de las regletas permite plantear ambas operaciones como complementarias. En el caso del alumno que ha unido la regleta verde clara (3) con la amarilla (5) y coloca encima la regleta marrón (8), se está planteando que $3 + 5 = 8$; pero también $8 - 3 = 5$; y que $8 - 5 = 3$.

Por último, añadir que casi todas las actividades que podemos hacer con las regletas se pueden hacer usando el papel cuadriculado. Incluso podemos considerar ambos materiales como complementarios, en el sentido de que con las regletas estamos hablando de manipular, mientras que en la cuadrícula se trata de dibujar. Añadir que el papel cuadriculado ofrece la ventaja de que es un material que puede ser a la vez continuo como las regletas y contable si contamos los cuadros de uno en uno.

- **Reflexión sobre el uso del material**

En general podemos afirmar que lo importante de un material didáctico no es el material en sí mismo, sino el uso que hagamos de él. Si hacemos un análisis del material referido hasta ahora en términos de utilidad y ponemos como ejemplo la suma de $8 + 7$, podríamos decir que en principio, contar con los dedos tiene una cierta ventaja sobre contar las habas o los taponos porque empieza a contarse a partir del ocho, no hace falta contar todos los elementos de un conjunto y otro, y por lo tanto se tarda un tiempo menor; y que de la misma manera, las regletas mejoran el aprendizaje por su condición de “sumar” (medir) con la mirada a golpe de vista. Sin embargo, imaginemos que el maestro de las “habas contadas” no las presenta en dos conjuntos amorfos, sino que las organiza en dos filas de 8 y 7 y traslada dos de ellas de la fila de 7 a la fila de 8, convirtiéndolas en una fila de 10 y otra de 5. Si nos fijamos bien, este planteamiento está ya muy cerca del que se hace con las regletas. Igualmente el maestro que usa los dedos puede plantear la suma utilizando los dedos de los pies y planteando que en una mitad de nuestro cuerpo tenemos ocho (5 de los pies y 3 de las manos) y en la otra mitad siete (5 de los pies y 2 de las manos) convirtiendo así la suma también en 10 (en los pies) + 5 (en las manos); y acercándose de este modo al planteamiento de las regletas. Añadir sólo que, aún en este caso, las regletas conservan algún tipo de ventaja derivado de que es un material contable y a la vez continuo: $8 + 7$ mide 15...

En cualquier caso, lo que queremos decir es que el material debe ocupar el lugar que le corresponde dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, un papel siempre ligado -no lo olvidemos- a la comprobación, porque antes se ha planteado el *jugar a acertar*. Y que en ningún caso su papel puede sustituir la función del maestro. Como se suele decir: En todos los casos es mejor un buen maestro que un buen método o un buen material.

d).- Conclusiones:

Quizás de las cosas más reseñables cuando llevamos a la práctica todas estas actividades de la 1º fase, sea el papel preponderante de la actividad manipulativa junto a la actividad oral; y a su vez, **la ausencia de la actividad escrita**. Es importante que así sea si queremos poner en contacto al alumno con un número mayor de experiencias, puesto que las actividades escritas, como ya sabemos, acaparan una gran parte del tiempo disponible. El maestro debe tener esto muy claro, porque existe en general una sobrevaloración de las actividades escritas sobre el resto, en el sentido de una visión

resultadista de nuestro trabajo que ejerce una presión inconsciente que favorece el que cuando la actividad es escrita, el resultado de nuestro trabajo está ahí delante de nuestros ojos, no hace falta justificarlo; pero ¿qué pasa con los resultados que no se ven -aparentemente- de actividades tan importantes -si no más- que las escritas y referidas a la actividad oral, manipulativa o mental? El maestro debe tener esto muy claro porque es indudable que esa visión resultadista de nuestro trabajo lo desliza de forma casi inconsciente hacia una preponderancia y una mayor valoración de la actividad escrita.

2ª FASE: De la manipulación a la abstracción: El camino hacia el cálculo mental.

En primer lugar, aclarar que aunque la manipulación del material es muy relevante en una primera fase, la actividad no puede quedarse ahí, sino que debe trascender siempre hacia una actividad del pensar. Decir en este sentido que entendemos que aunque aquí se presenten como dos fases distintas, en la práctica debe haber una gran permeabilidad entre las actividades de la fase de manipulación y esta fase que inicia el camino hacia la abstracción. Lo que queremos decir es que no hay que esperar a tener consolidada la etapa manipulativa para plantear actividades como éstas más abstractas. Y también que este proceso debe ser lento y también cargado de experiencias.

• Con los ojos cerrados.

Así podríamos titular no una actividad concreta de la didáctica de las matemáticas, sino un principio didáctico a aplicar en todas las actividades, incluyendo las destinadas a los alumnos más pequeños. En general este principio se puede aplicar a cualquier actividad en la que se pasaría de una primera fase viéndola, para pasar después a hacerla “con los ojos cerrados” -ver con “los ojos de la mente”, como me gusta decirle a mis alumnos-. Siempre la introducción de actividades “con los ojos cerrados” nos conduce al tema del desarrollo de la capacidad mental de nuestros alumnos y es un magnífico principio didáctico no sólo en esta actividad sino en muchas otras relacionadas con las matemáticas y otras áreas de aprendizaje. Veamos alguno ejemplos.

Imaginemos en el aula de infantil el juego por parejas en el que un alumno presenta un número de tapones o una regleta que su compañero debe acertar con los ojos cerrados mediante el tacto. O esta otra referida a sumar/restar utilizando los dedos de los pies o con los dedos de la mano colocando éstas detrás. O la referida a contar/descontar en la recta numérica de lo alto de la pizarra en la que el alumno hace la operación con los ojos cerrados y después lo comprueba viéndolo..

Interesante nos parece también destacar la experiencia con los alumnos de primero que inician los primeros algoritmos, por ejemplo sumando o restando números con dos cifras. En un momento determinado el maestro plantea que ahora se va a hacer la cuenta no escribiéndola en el cuaderno sino escribiéndola con el dedo en la mesa; para después en otra fase escribirla con el dedo en el aire y por último como si estuviéramos escribiéndola en nuestra mente. Este proceso que el alumno comienza escribiendo las cuentas en el cuaderno, para después “verla” en la huella de su dedo en la superficie de la mesa o en “la no huella” de su dedo en el aire, es también el proceso desde el ver al “ver con los ojos de la mente”, es decir el proceso hacia la abstracción. Como muy bien dice el poeta René Char: *“Si el hombre no cerrara de vez en cuando soberanamente los ojos, no habría nada que mereciese contemplarse”*.

• Sumar/restar “a golpe de vista”.

Se trata con estas actividades de que el alumno supere la fase de contar de uno en uno que como hemos comentado corre el riesgo de convertirse en algo repetitivo y rutinario, para hacerlo “a golpe de vista”. A este apartado pertenecería la actividad que ya hemos reseñada de sumar buscando 10 utilizando los dedos de los pies. O también el juego de “la calculadora averiada” que sólo sumaba $5 + 5$, con lo que cualquier suma, por ejemplo, $6 + 7$, pasaría a convertirse en $(5 + 1) + (5 + 2) = (5 + 5) + 1 + 2$. O la misma calculadora averiada que sólo sumaba números iguales, de manera que $8 + 7$ lo convertiríamos en $(7 + 7) + 1$ ó en $(8 + 8) - 1$. En ambos casos, destacar que en estos juegos con “la calculadora averiada”, hay un pequeño, pero muy relevante, aprendizaje, añadido al de sumar, y es el referido a que a la hora de calcular, toda cuenta siempre puede cambiarse por otra equivalente y que nos convenga más. Un principio de cálculo que lo desarrollaremos más adelante.

También añadir que de alguna manera, puede establecerse una relación muy pertinente entre la actividad de contar de uno en uno con el silabeo en la lectura. En ambas actividades se trata de lo mismo: sumar “a golpe de vista” de la misma manera que también el alumno para superar la fase de silabeo necesita aprender a leer “a golpe de vista” las palabras.

3. LA INTRODUCCIÓN DEL USO DE LA CALCULADORA.

Una vez consolidado los conceptos de suma y resta ligados al planteamiento de los problemas y a la manipulación del material, es interesante introducir la calculadora; también en este caso sólo para comprobar. Imaginemos que el maestro dice a los alumnos que recojan todo y dejen encima de la mesa sólo la calculadora. Entonces plantea -ya lo sabemos- nuestro *Vamos a jugar a acertar. A ver quien acierta cuántos son seis más cinco* -por ejemplo-. Y escribirá $6+5 =$ en la pizarra. Y dejará -también lo sabemos- un poco de tiempo para que los alumnos piensen y para que levanten la mano y digan el número por el que han apostado. Entonces lo que toca -también lo sabemos- es: *Vamos a comprobar*; y los alumnos cogerán su calculadora, y mientras el maestro lo hace en la suya, ellos a la par van pulsando las teclas correspondientes para comprobar el resultado y contrastarlo con el que ellos habrían pensado para acertar. Y no hay tiempo para más, porque ya el maestro está planteando la siguiente operación con el *vamos a jugar a acertar* y que será muy parecida a la anterior. Por último añadir que como ya intuimos el mismo planteamiento es válido para las operaciones de resta que deben simultanearse.

De las cosas en las que nos podríamos detener a analizar en relación con esta actividad, quizás la que llame más la atención sea la utilización de la calculadora. Un tema que a veces ha sido controvertido sin tener por qué serlo. En este caso, como hemos visto se limita sólo a comprobar. Digamos que para nuestro maestro las operaciones matemáticas son como conceptos/herramientas y como tales su aprendizaje va ligado a su uso; al igual que cualquier herramienta, las operaciones se aprenden usándolas. Es decir, una vez aprendido el concepto se debe empezar sin dilación a hacer muchas sumas o restas. Pero ¿por qué la calculadora? La respuesta es que así se propicia la eficiencia de las actividades de cálculo en relación con su uso. O lo que es lo mismo esa es la forma más directa de usar las operaciones como concepto/herramienta, como más operaciones va a hacer el alumno y como mejor rentabiliza el maestro el tiempo disponible. Quizás se pueda pensar que el alumno también puede hacer muchas sumas si escribe las cuentas en el cuaderno, pero en este caso, es evidente que no es tan directo, se tardaría bastante más y el número de operaciones sería menor.

También es en esta fase cuando la combinación: jugar a acertar/comprobación con la calculadora, se hace más efectiva e imparable porque están muy próximos en el tiempo los dos números -el de jugar a acertar y el de comprobar- como puntos de referencia sobre los que el alumno construye su reflexión sobre el error y de camino el desarrollo de su capacidad de pensar.

Por otra parte, es interesante -como ya hemos visto en otras actividades- que el maestro vaya cediendo su protagonismo en favor de los alumnos, pidiendo voluntarios para que sean éstos quienes propongan la cuenta,. Cuando esto ocurre, puede y suele suceder que los alumnos planteen alguna operación con un grado de dificultad no previsto o por encima de las “posibilidades” del alumno. Me explico: Supongamos que todavía sólo han aprendido los números hasta el 20 y un alumno ha planteado un problema de sumar -por ejemplo $15+8$ -. Ello significa siempre oportunidades de explorar e introducir nuevos aprendizajes o impulsar los aprendizajes como aventura más allá de lo que se espera de los alumnos.

Digamos que en general hay una fuerte tendencia en la metodología a tratar la didáctica de las matemáticas desde la graduación/gradación de las dificultades: a cada edad del alumno le corresponde un grado de dificultad en las actividades que se proponen. Ese puede ser un buen principio general cuando se espera del alumno respuestas acordes con su edad y capacidades, sin embargo actividades de este tipo en las que el alumno es quien propone, los límites de la actividad sobrepasan este principio porque los alumnos no entienden de la graduación de los aprendizajes, sino más bien de la actividad como juego y como aventura, una palabra ésta última cada vez más ligada al aprendizaje y sus emociones. Así, desde la lógica de la metodología, las operaciones de suma/resta pueden tener la graduación ya prevista de: sumas/restas con números menores de 10, con números entre 10 y 20, con

decenas completas, con decenas y unidades, con números de dos cifras... De modo que el maestro debe tener en cuenta esta graduación, pero a la vez debe también impulsar la capacidad de iniciativa de los alumnos a través de su expresión libre. De ahí la importancia de que sean los propios alumnos los que propongan las cuentas.

Por último, esta propuesta de actividades de suma/resta y comprobación con la calculadora debe terminar con la actividad individual de que sea el propio alumno el que se ponga a sí mismo las cuentas y las compruebe después con la calculadora. Entonces, la actividad ha llegado a su culmen y la labor del maestro -ya lo sabemos- es simplemente la de pasear entre sus alumnos e ir observando y comentando cosas con ellos a fin de resolver dudas o estimular su interés.

Hasta aquí, recordemos que la actividad sólo ha necesitado la calculadora y no ha aparecido todavía el lápiz y el cuaderno. Para nuestra propuesta es importante que así sea, que antes de la escritura se haya desarrollado plenamente la fase que podemos denominar como oral y manipulativa de modo que el alumno haya acumulado suficiente experiencia con el uso del material, los dedos, las regletas y la calculadora.

- **La introducción de cualquier operación matemática como concepto/herramienta usando la calculadora.**

El planteamiento que hemos visto para la suma y la resta es el mismo que utilizaremos para el resto de las operaciones, sea ésta la multiplicación, división, potencia o raíz cuadrada. Hay una fuerte tendencia por parte de los maestros a explicar demasiado los nuevos conceptos y nuevas operaciones. Por nuestra parte pensamos que más que explicar de lo que se trata es de promocionar su uso y en ese sentido el papel de la calculadora es fundamental. La propuesta didáctica es la misma: partir de problemas y plantear la pregunta en términos de jugar a *acertar*, *estimar*, *aproximar*; para por último *comprobar* con la calculadora. Y siempre dando a la actividad la intención de que se trata de conceptos/herramientas y de que lo importante es su uso inmediato y lo más extensivo posible; y también utilizarlas libremente, como una herramienta o un juguete que estrenan. "*Ahora que ya sabemos lo que es multiplicar, pues a escribir las multiplicaciones que cada uno quiera...*"... Podemos afirmar que antes del algoritmo, o antes de las tablas, está esta actividad en la que el alumno comienza el uso de las operaciones matemáticas explorando las posibilidades y los límites del nuevo concepto y los suyos propios.

4.- EL TEXTO LIBRE DE MATEMÁTICAS.

4.1.- El comienzo del cálculo escrito.

Imaginemos como siempre, que el maestro ha llegado al aula y le ha dicho a sus alumnos que preparen su cuaderno con la fecha y el título *SUMAR -o RESTAR-*; y que preparen también la calculadora. Entonces el maestro propone la primera cuenta y la escribe en la pizarra: por ejemplo $6+5 =$, a la vez que los alumnos la escriben en su cuaderno. Después el maestro plantea nuestro familiar *vamos a jugar a acertar* y cada alumno piensa y escribe su apuesta en el cuaderno detrás del signo $=$. Después ya lo sabemos nuestra maestra dirá: *Vamos a comprobar*; y los alumnos cogerán su calculadora y de camino corregirán su error -si lo hubiere. tachándolo y escribiendo detrás el correcto. Después preguntará sin dar apenas importancia por esos errores; y propondrá una nueva operación...

No hace falta decir, porque esa es otra de las ideas claras que debemos sacar de estos apuntes, que el maestro pronto irá cediendo su protagonismo en favor de que sean los propios alumnos quienes propongan las operaciones y que la actividad siempre culminaría con el propio alumno proponiéndosela a sí mismo o jugando haciéndolo por parejas con su compañero. Como siempre, se trata de impulsar el autoaprendizaje del alumno. Tampoco hace falta reseñar que cuando la actividad pasa a ser protagonizada por los alumnos surge el tema de la no graduación de la dificultad y del aprendizaje como aventura ya reseñados. Incluso a veces es el propio maestro quien impulsa esta aventura de lo difícil, como si fuera importante el que el alumno intuya que hay un mundo más allá de lo que conoce y que se sienta atraído por él. Las páginas de la aventura de los grandes descubrimientos también se nutren de aventuras tan pequeñas como ésta que planteamos.

Decir también que ésta no es una actividad de "aprender a sumar o restar" en el sentido metodológico del aprender las tablas de sumar; sino que es simplemente un ir acumulando a través de su uso

experiencias sobre la operación de sumar o restar en relación con el *jugar a acertar* y después *comprobar* con la calculadora.

Por último, reseñar que es en estas primeras producciones escritas de los propios alumnos en las que se pone cuentas a sí mismo y después comprueba con la calculadora, donde está el germen de los primeros textos libres del alumno en matemáticas. Lo que nos permite reivindicar para esta actividad la asignación de un tiempo del horario escolar al igual que ocurre con la lectura. ¿Qué tal si dedicamos la media hora final de la jornada escolar, dos veces a la semana por ejemplo, para que los alumnos hagan textos libres de cálculo comprobándolos con su calculadora?

4.2.- Sobre el texto libre de matemáticas

Aunque el texto libre de Matemáticas nos pueda llevar a pensar sólo en la actividad escrita, podemos afirmar que se trata de una concepción del aprendizaje más extensa que se corresponde con abrir todas las actividades a la creación por parte del alumno y es el modo de culminar todo el proceso de aprendizaje sobre cualquier concepto, o lo que es lo mismo: toda actividad debe terminar con la expresión libre del alumno, sea oralmente o por escrito. Aunque sean los textos escritos los que propicien mejor el encuentro del alumno consigo mismo, con sus dificultades y con su afán de aventura. Así, una vez introducida la operación el maestro puede proponer siempre al alumno: *Y ahora que ya has aprendido lo que es una potencia escribe las potencias que quieras y compruébalo con la calculadora.* Entre las actividades que fomentan el texto libre del alumno en Matemáticas destacaríamos estas dos:

- **Descomposición de un número.**

Lo vimos cuando hablamos sobre la “organización geométrica del material” en la construcción del concepto de número, cuando planteábamos las formas del número 12 en filas y columnas de $10+2$, 2×6 , $2 \times 5 + 2$, etc. O en las construcciones que el alumno hace con las regletas de Cuisenaire y que les llama “paredes”. En general es una actividad que podemos hacer en cualquiera de los cursos de Primaria y que consiste en escribir diferentes formas de expresar un mismo número utilizando todas las operaciones aprendidas. A mí, personalmente, me gustaba ponerle de título: *El protagonista es el*, seguido del número correspondiente. Así, en *El protagonista es el 10*, un alumno de Primero podría escribir: $10 = 7+3 = 6+4 = 11-1 \dots$ De la misma manera que el de Segundo escribiría: $10 = 2 \times 5 = 3 \times 3 + 1 = 3 \times 4 - 2 \dots$ O el de Quinto: $10 = 3^2 + 1 = 2^3 + 2 = 6,4 + 3,6 \dots$ Y así hasta escribir un texto formado por muchas operaciones en las que el alumno se va proponiendo metas a la vez que va utilizando y desarrollando sus conocimientos y su creatividad.

- **Tablas sin ley.**

Se trata de que el alumno vaya escribiendo un número -por ejemplo 20- de operaciones de una tabla, por ejemplo $N+4$, en la que N es el número que el propio alumno va eligiendo desordenadamente ($3+4 =$, $20 + 4 =$, $108 + 4 = \dots$) construyendo así su propia tabla de sumar 4. O si estamos en Cuarto la tabla podría ser: $N \times 40 - 27 = \dots$

5.- DE LA ORGANIZACIÓN GEOMÉTRICA DEL MATERIAL A LA MULTIPLICACIÓN. EL PAPEL CUADRICULADO Y LAS REGLETAS.

Lo que hasta ahora hemos venido denominando “la organización geométrica del material”, en relación con la etapa manipulativa del aprendizaje matemático, está íntimamente ligada a la multiplicación. En principio sólo se trata de ordenar el material contable en filas y columnas y no es necesario siquiera utilizar la palabra multiplicar. Por ejemplo: *A ver quién acierta cuánto son tres filas de cuatro ó tres veces cuatro.* Después, cuando los alumnos están familiarizados con la actividad podemos comenzar a utilizar las expresiones 3×4 , 2×8 etc. También la actividad puede tomar la forma de dictado en la que el maestro dicta una expresión: 3×5 y los alumnos primero juegan a acertar y después comprueban con el material.

Pero quizás el material más interesante para la multiplicación sea el papel cuadriculado y las regletas, de manera que el alumno traslade las multiplicaciones a su representación en la cuadrícula como rectángulo, a la vez que nos permite hacer la comprobación del número total introduciendo el contar de dos en dos, tres en tres, etc; o lo que es lo mismo, la serie de los múltiplos correspondientes. Incluso la cuadrícula o las regletas son válidas para resolver operaciones de multiplicar números de dos cifras

sin necesidad del algoritmo. Supongamos la multiplicación 18×27 y que al dibujar la cuadrícula la convertimos en $10+8$ y $20+7$ quedando dividida la cuadrícula en cuatro partes: $10 \times 20 + 10 \times 7 + 20 \times 8 + 8 \times 7$. Introduciendo así -sin nombrarla siquiera- la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma que está en la base del algoritmo de la multiplicación.

6.- EL DESARROLLO DEL CÁLCULO MENTAL. De la pizarra y el pizarrín a la tablet.

Como todos sabemos el desarrollo del cálculo mental de basa en las preguntas que hace el maestro o que tiene que hacerse el alumno a partir de los programas de cálculo que podemos hallar en Internet. De todas las formas que el maestro puede preguntar a los alumnos las operaciones de cálculo mental, a mí me gusta destacar ésta que casi pudiera convertirse en un relato literario que comienza en una escuela rural donde dos alumnos reparten entre sus compañeros las pizarras, pizarrines y el paño húmedo para borrar. Después el maestro escribirá en su pizarra, por ejemplo, la expresión matemática: $4 \times 7 + 3$, y dará a los alumnos unos segundos para que piensen el resultado y lo escriban en sus pequeñas pizarras, para después, a la voz de “arriba”, levantarlas a la altura de su cara, de manera que de un sólo vistazo el maestro puede ver todos los resultados que muestran sus alumnos. A continuación, y como ocurre casi siempre, el maestro corregirá los errores, aunque muchas veces elige a un alumno que explique el error a su compañero. Y después ya sabemos que tanto los alumnos como el maestro borrarán las pequeñas pizarras con el paño húmedo para que estén preparadas para la siguiente expresión matemática que el maestro tiene pensada para el cálculo mental de hoy; pongamos por ejemplo: $3 \times 7 - 4$, porque hoy tocaba repasar la tabla de multiplicar del 7. Y después le tocará a $2 \times 70 + 50$; ó $4 \times 700 + 200$; porque las tablas de multiplicar del maestro también eran complementadas con el número correspondiente a las decenas, centenas, miles, etc.

Digamos que el maestro siente un especial afecto por este material hoy ya desaparecido de nuestras aulas. Porque quizás un día él pensó que su función principal no debía ser tanto explicar como preguntar, y desde entonces ha venido explorando diferentes maneras de hacer más eficiente esa misma función de preguntar, hasta llegar a la conclusión de que no hay mejor manera de hacer preguntas a sus alumnos que ésta que se hace con las pequeñas pizarras y el pizarrín. Con ellas el maestro puede preguntar y conocer de inmediato las respuestas de todos sus alumnos, corroborando así su convencimiento de la pertinencia y eficacia de este material que él mismo considera único. Y también ¿por qué no?, piensa que igual que sirve para preguntar sobre cálculo mental también servirá para preguntar sobre los ríos y montañas de nuestro país, sobre los huesos y músculos de nuestro cuerpo, o sobre la vida y obra de nuestros poetas.

Es verdad; el tiempo pasa por nosotros y también por las experiencias escolares aunque éstas sean tan extraordinariamente pertinentes y eficaces. Así que un buen día y casi sin saber cómo, las pizarras y pizarrines fueron poco a poco desapareciendo de nuestras aulas y con ellas quizás también se fueron las preguntas del maestro, y su convencimiento de que su función principal -ya lo sabemos- fuera no tanto la de explicar como la de preguntar. Aunque, eso sí, ahora ese mismo convencimiento y esos principios del maestro, nos regresen en nombre de teorías del aprendizaje muy actuales y que se llaman constructivistas o de redescubrimiento que se repiten en artículos y publicaciones que salvo raras excepciones apenas contemplan el camino de ida y vuelta que significa siempre la experiencia de la práctica en el aula...

Es verdad; el tiempo pasa... Pero, porque quizás haya una justicia poética en las cosas que hacen los maestros y que merecen ser contadas, probablemente hoy mismo haya compañeras y compañeros que buscando en las formas de hacer más eficiente su función de preguntar para desarrollar el cálculo mental, hayan encontrado la misma pertinencia de entonces haciendo ahora con las pizarras y rotuladores Viledas, o con las tablets, aquello mismo que hacía el maestro con la pizarra y el pizarrín.