APUNTES PARA UNA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

DOCUMENTO 3:

SOBRE ALGORITMOS, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS y GEOMETRÍA INTUITIVA

1.- SOBRE LOS ALGORITMOS.

1.1.- Del algoritmo único y el pensamiento único.

Pongamos por caso la multiplicación 3487 X 298 desde la manera de calcular del algoritmo tradicional:

$$\begin{array}{r} 3\,4\,8\,7 \\ \text{x}\,2\,9\,8 \\ \hline 2\,7\,8\,9\,6 \\ 3\,1\,3\,8\,3 \\ 6\,9\,7\,4 \\ \hline 1\,0\,3\,9\,1\,2\,6 \end{array}$$

Todos sabemos que este algoritmo tradicional se basa en la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la suma: 3487x298 = 3487x8 + 3487x90 + 3487x200. Ello se entendería mejor si los "huecos" de la multiplicación se rellenaran con los ceros correspondientes que faltan en los productos parciales segundo y tercero y el signo + de la suma. Una opción que muchos maestros suelen utilizar a la hora de enseñar a multipicar a sus alumnos.

$$\begin{array}{r} 3\,4\,8\,7 \\ \text{x}\,2\,9\,8 \\ \hline 2\,7\,8\,9\,6 \\ \\ 3\,1\,3\,8\,3\,0 + \\ 6\,9\,7\,4\,0\,0 \\ \hline 1\,0\,3\,9\,1\,2\,6 \end{array}$$

Y es precisamente la ausencia de estos ceros y el signo de la suma en el algoritmo tradicional lo que nos plantea la primera cuestión: ¿Por qué y cómo se impuso una forma de calcular que prima la mecánica de la operación perdiendo así todos los signos que hacían al algoritmo más reconocible e inteligible? ¿Por que se apostó hacia que no era tan importante entender lo que se estaba haciendo, sino aprender una forma mecánica de calcular única y orientada hacia la consecución de un resultado exacto lo más rápidamente posible, prescindiendo de todo lo demás?

Quizás alguna de las respuestas a estas preguntas haya que buscarlas en indagaciones que nos sitúan en el marco de las relaciones de poder dentro del propio conocimiento. El algoritmo debió ser históricamente un aprendizaje muy valorado por su utilidad como manera de resolver cálculos de una forma rápida y segura. Era, por así decirlo una herramienta de poder. Así que imaginemos en algunas culturas antiguas el algoritmo como un aprendizaje sólo al alcance de una minoría de escribas dispuestos a secuestrar un conocimiento que da poder. ¿Por qué poner al alcance de la mayoría el privilegio de un conocimiento que da poder? ¿Como ir en contra del destino de que todo poder tiende a reproducirse? O pensemos en eso que todavía parece oírse en nuestra propia cultura y referido a las generaciones anteriores, no tan lejanas, de "saber leer y las cuatro reglas" como un curriculum importante a la hora de encontrar empleo. Así que lo importante en la construcción social e histórica del algoritmo de la multiplicación no era el pensar, sino aprender el uso de esa herramienta de una forma segura, rápida y fiable; que no se entendiera lo que se hacía era una cuestión prescindible. Pero ¿por qué el éxito de una propuesta didáctica de ese tipo le llevó a casi convertirse en única, obviando otras alternativas? ¿Por qué prosperó esta forma de calcular cuando había otras disponibles?

Imaginemos la misma cuenta resuelta de esta manera:

```
     3 4 8 7
      x 2 9 8
 -------------
 6 9 7 4 0 0
     3 1 3 8 3 0 +

     2 7 8 9 6
 -------------
1 0 3 9 1 2 6
```

Como se puede observar, en realidad se trata del mismo algoritmo sólo que se ha empezado a multiplicar por las centenas. Es curioso que no triunfara una opción que ofrece la ventaja de que da una información acerca del resultado aproximado desde el primer producto parcial. Una ventaja que no está en el algoritmo tradicional que tiene que esperar hasta obtener el último producto parcial. Pero es evidente que tampoco la relevancia de lo que aportaba el cálculo aproximado fue valorado. Ni siquiera sería porque se buscaba una forma ordenada, puesto que en ambas opciones hay un orden sólo que cada una en sentido contrario de la otra. Una empieza por las unidades, la otra por las centenas, pero en ambas hay un orden. En definitiva, digamos que se impuso una manera de entender el orden empezando por las unidades por algo así como que lo primero es lo primero, una manera de entender el orden que impone su propia ideología. Después sólo era cuestión de añadir una mecánica rutinaria para obtener un resultado cuanto antes, no importando sacrificar todo lo demás porque lo importante, repito, era ahorrar tiempo y por tanto conseguir un resultado lo más rápido posible. ¿Lo era?

Es evidente que esa opción no era la más rápida si tenemos en cuenta esta alternativa:

```
      3 4 8 7
       x 2 9 8
 --------------
 1 0 4 6 1 0 0
         6 9 7 4 -
 --------------
 1 0 3 9 1 2 6
```

Como aquí se puede también observar, lo único que se ha hecho es operar sustituyendo el factor 298 por su equivalente: 300-2. Una opción que es más rápida, sólo necesita dos productos parciales y la resta correspondiente. Cuando en el aprendizaje de los algoritmos se apuesta por lo mecánico y se sacrifica el pensar, suele ocurrir cosas como éstas, que de pronto parecen poner en cuestión el andamiaje de formas de calcular muy consolidadas.

Porque es evidente que ésta es una opción mejor y más rápida, y que su único inconveniente es que no puede ser válida para todos los casos, es decir no es “única”. Quizás por eso no pudo prosperar. Aunque en cualquier caso esta alternativa nos puede servir para desmontar que las “razones” del algoritmo tradicional, quizás no eran tales; porque además de sacrificar las cuestiones relacionadas con el pensar, el entender lo que se hace, o el cálculo aproximado, el algoritmo tradicional sacrifica también su valor primordial, su propia vocación de ser fiable y rápido; y todo ello en pro de un algoritmo “único”, una única manera de calcular.

Las razones profundas del por qué se impuso esta manera única de calcular podría convertirse en un interesantísimo análisis y objeto de estudio para una antropología de la educación que buceara en las relaciones con la tendencia de nuestra propia cultura hacia los dogmas, hacia lo simple, hacia huir de lo complejo, hacia las respuestas únicas y las soluciones únicas; en definitiva hacia el pensamiento único; y de camino, hacia una cierta pereza colectiva en relación con las actividades de pensamiento y que exigen un cierto esfuerzo mental.

Alguien dijo que hay una ideología detrás de todo. Quizás por ello la metáfora del algoritmo único nos conduce a las formas a través de las cuales también se construye el pensamiento “único”, que también tiene las mismas o muy parecidas formas de imponerse y reproducirse. La verdad única se construye con los mismos ingredientes: la postergación de la diversidad, que es lo mismo que decir, la anulación de las formas plurales del pensar. Hay una ideología detrás de todo. Así que algo aparentemente tan inocente como la construcción de una forma de algoritmo, puede esconder -y también su deconstrucción puede sacar a la luz- formas de hacer que en el fondo son profundamente ideológicas. Pero todo esto, claro, está se lo dejaremos a los antropólogos y a los filósofos de la historia, porque a nosotros nos interesa más lo que todo ello tiene en relación con su aplicación en las actividades concretas de la realidad de nuestras aulas.

1.2.- Sobre las formas plurales de calcular.

Esta propuesta de abrir los límites que marcan el algoritmo único hacia otras formas de cálculo, nos conduce directamente al establecimiento de una estrategia global que podría definirse como la sustitución de una cuenta por otra equivalente que nos sea más fácil. Y es ésta una propuesta que creemos debe aprenderse, al menos, paralelamente al algoritmo tradicional. Veamos algunos ejemplos.

Imaginemos la suma 48+27=. Una suma "llevándose" que podemos cambiar por 50+25 si explicamos a los alumnos que del conjunto de 27 hemos pasado dos elementos al de 48; y que por tanto aunque hayan cambiado los sumandos, la suma total no cambia.

O imaginemos ahora la resta 72-38=, una resta "llevándose" que podemos cambiar por 74-40=, si explicamos a los alumnos que si añadimos dos elementos a cada conjunto la diferencia no varía.

O podemos cambiar la multiplicación 248x12, una multiplicación de dos cifras que podemos resolverla desde una sola cifra así: 248x2x6 ó así 248x3x4. O bien aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la suma: 248x12=248x10+248x2. O bien aplicando esta misma propiedad desde la resta: 256x28=256x30-256x2, etc.

En general, podemos afirmar que esta es una propuesta abierta a la investigación por parte del alumno si se le estimula planteándolas en forma de relato: *Érase una vez un alumno que no sabía restar llevándose ¿Cómo podría resolver entonces la cuenta 72-45?* O esta otra: O*bservad como se ha resuelto esta cuenta y qué os parece: 50x36=100x36:2…* o esta otra, que puede sorprendernos un poco: *25X48=48x100:4.*

En definitiva, lo que queremos decir es que esta propuesta que hemos denominado: *Las formas plurales de calcular,* es un campo interesantísimo de experiencias de aprendizaje y una alternativa interesantísima frente a la idea de algoritmo único. De alguna manera, frente a la estrechez de miras que suponen los algoritmos únicos, se levanta esta propuesta más abierta y más plural y que tiene consecuencias sobre la propia construcción de la identidad del alumno. Como se suele decir propuestas abiertas generan siempre mentalidades abiertas.

2.- SOBRE UNA DIDÁCTICA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

2.1.- Los problemas escolares y el contexto histórico y social.

Que los problemas escolares que se realizan en nuestras aulas en el área de matemáticas tienen una íntima relación con la vida diaria y sus cambios, puede quedar reflejado en las experiencias educativas concretas que se produjeron en los planteamientos didácticos con motivo de la entrada de nuestro país en el euro. Por ejemplo, acostumbrados al uso de la peseta los problemas para alumnos de primero no podían hablar de camisas y pantalones, pues sus precios eran números superiores a las mil ptas; es decir números de cuatro cifras. Digamos que era una circunstancia historico-social lo que marcaba que este tipo de problemas se destinaran a los cursos a partir de tercero. Pero la entrada del euro, digamos que vino a modificar ese status. Ahora el precio de camisas y pantalones eran ya números de dos cifras, por lo tanto ¿por qué no plantearlos ahora en primer y segundo curso?

Pero además estos cambios no sólo tienen que ver con cuestiones así, sencillas, sin muchas complicaciones; sino que algunos de esos cambios afectaban a lo que pudiéramos llamar la estructura de la programación de acuerdo con la racionalidad interna de la propia asignatura. Digamos que los precios de camisas y pantalones eran ahora con el euro números de dos cifras, números facilitos, pero ese "empequeñecimiento" en las cifras, vino acompañado también de la "invasión de los números decimales". De pronto la realidad del alumno empezó a convertirse en una realidad dominada por el uso del decimal: el material escolar se expresaba en céntimos y los precios de la frutería o panadería se expresaban en euros y céntimos.

Resulta curioso indagar en cómo este tema de pensar en qué curso introducir los números decimales en los contenidos de la programación puede ser significativo de lo que queremos plantear. Cuando existía la peseta, digamos que había una cierta concordancia entre la secuenciación de los contenidos de acuerdo con la racionalidad interna de la propia asignatura. Una racionalidad que impulsaba que los números decimales se introdujeran relacionados con las fracciones decimales. Es decir, primero se enseñaban las fracciones y después como un subconjunto de éstas ahí estaban los números decimales; trasladándose éstos y los problemas correspondientes a los cursos de tercero o cuarto. Pero he aquí que la entrada del euro vino a modificar y a tener que replantearse la cuestión. El alumno vive ahora rodeado de los números decimales, forman parte de su experiencia diaria. ¿Qué hacer entonces? ¿Seguimos con la idea de atender a la secuenciación de contenidos de acuerdo con la racionalidad interna de la asignatura introduciendo el tema en tercero o cuarto curso? ¿O soslayamos la relevancia de ésta y atendemos más a la experiencia vital del alumno introduciendo el uso de los decimales en primer ciclo?

Añadir a todo esto que pudo haber además un tema curricular afectado de forma colateral por la entrada en el euro y del que apenas se suele hablar. Me refiero a los problemas relacionados con la medida. Por su carácter continuo -no contable- el uso de la medida siempre nos lleva a magnitudes que no son exactas, necesitan expresarse en muchos casos desde el número decimal. Por eso era difícil encontrar actividades o problemas relacionados con la medida en los primeros cursos. Circunstancia que "la invasión" de los decimales propiciada por la llegada del euro ha venido a modificar. Los alumnos de primer ciclo e incluso de Infantil pueden adquirir experiencias con la medida en la construcción del aprendizaje del concepto de número como ya vimos en el documento 2. O bien pueden desarrollarse actividades de medida y operaciones con números decimales por delante del principio de secuenciación de contenidos atendiendo a la racionalidad interna de la asignatura si atendemos a la experiencia vital del alumno.

El tema del debate que se debió producir en la didáctica de las matemáticas propiciado por nuestra entrada en el euro, supone así un ejemplo claro de como la didáctica no es sólo una cuestión en abstracto, sino que está sometida a los cambios en el contexto socio-cultural en el que se desarrolla nuestra labor.

2.2.- Los problemas de Matemáticas y los textos sociales.

Una de las experiencias más interesantes llevadas a cabo en el aula en relación con la didáctica de la resolución de problemas es la realizada por los compañeros Antonio Aranda y Desirée Alba con sus alumnos y que podríamos titular así: *los problemas de Matemáticas y los textos sociales*. Se trata de una propuesta que lleva a la práctica del aula la realidad que rodea al alumno a través de los folletos publicitarios que llegan a sus casas de los hipermercados, de la información que encuentran en los lugares públicos: cartas de precios de los bares, ofertas de las tiendas, etc; e incluso de la información a la que el alumno puede acceder a través de la red.

Es extraordinario y sugerente observar las clases de estos compañeros y a los alumnos manejando los folletos publicitarios de Carrefour, Dia, El Corte Inglés, etc. que ellos mismos traen al aula y que comprenden una fuente inagotable de propuestas de problemas matemáticos. Los precios, las ofertas, los porcentajes de las rebajas, etc, son utilizados para plantear problemas o simular situaciones de compras, o de comparaciones entre artículos, aplicando así los diferentes algoritmos aprendidos, o introduciendo uno nuevo. Igualmente las simulaciones de compras en tiendas en las que el alumno puede jugar el rol de comprador o cliente; o de la misma manera, con las cartas de precios de los bares simulando con folletos reales situaciones de familias que piden bebidas y tapas, o personificando el alumno el rol de camarero, son las experiencias que estos compañeros han llevado al aula y que se corresponden con situaciones habituales en la vida del alumno.

De forma parecida se plantean propuestas que más que problemas son proyectos en los que se juntan varios tipos de problemas. Por ejemplo plantear la organización de una excursión o una visita y en la que los alumnos tienen que buscar información real en la red, sobre precios de entradas, distancias

recorridas, tiempos empleados, etc; y con esa información elaborar informes, presupuestos, etc.; ampliando así el concepto y el ámbito tradicional de los típicos problemas escolares.
Asistir a las clases de estos compañeros y lo que hacen con sus alumnos son de alguna manera "darse un baño de realidad", o lo que es lo mismo que decir que experiencias de este tipo son la máxima expresión de acercamiento de los contenidos de enseñanza a los aprendizajes que los problemas de la vida real proporcionan a nuestros alumnos.

3.- GEOMETRÍA INTUITIVA.

Así, con el propio título de la obra de Emma Castellnuovo, la insigne pedagoga italiana, queremos aportar al debate una de las ideas más originales que conozco en torno a la didáctica de la Geometría.

3.1.- Cuadriláteros isoperimétricos.

Imaginemos que el maestro coge una cuerda y "dibuja" con ella un rectángulo utilizando cuatro dedos como vértices. Después mueve sus dedos para convertir ese rectángulo inicial en otros rectángulos que van ganando altura hasta llegar a la figura del cuadrado. O bien mueve su muñeca para convertir el rectángulo en muchos romboides, a medida que la va girando, O también, de la misma manera, dibujar rombos a partir de la figura del cuadrado.
La actividad, como se puede entender, tiene un recorrido mucho más amplio, que junto con la reflexión sobre la práctica desarrollé en uno de los capítulos de mi libro *"Con trozos de tiza"*, bajo el título: *Geometría Intuitiva. A la manera de Emma Castellnuovo.* En resumen, lo que ese texto pretende aportar es una visión de la didáctica de la Geometría basada en el movimiento. Frente al aprendizaje de la geometría desde las figuras fijas y asiladas dibujadas en el libro de texto o en la pizarra, se propone esta visión de las figuras en movimiento. La pregunta pertinente sería sobre qué es lo que puede aportar el movimiento en relación con estos aprendizajes por parte de los alumnos.
En general, podemos afirmar que las principales aportaciones del hecho de que las figuras geométricas se muevan están relacionadas con el desarrollo de la capacidad de intuición del alumno. En primer lugar, podríamos decir que el movimiento aporta al aprendizaje la idea de que los paralelogramos no son conceptos aislados, sino que están relacionados entre sí: El alumno ve que el cuadrado es sólo un caso especial dentro del conjunto de los rectángulos, de la misma forma que éstos también pueden entenderse como un caso especial de los romboides, etc. Por otra parte, los paralelogramos que se mueven modifican sus lados y ángulos; el perímetro, en nuestro caso, no cambia puesto que hay un nudo que lo impide, pero sí el área, lo que plantea reflexiones en el alumno tan interesantes sobre cómo teniendo dos figuras el mismo perímetro, no tienen el mismo área, por ejemplo. Además, las cosas que se mueven tienen un origen y un destino, lo que nos permite introducir de forma intuitiva conceptos que están más allá en la programación. Por ejemplo ¿cuál será el límite de la superficie de los rectángulos que van ganado o perdiendo altura a medida que se acercan o se alejan del cuadrado?

3.2.- Triángulos isoperimétricos.-

Imaginemos que el maestro presenta al alumno un tablero de madera en el que se han clavado dos puntas que funcionarán como dos vértices que fijan también la longitud de uno de los lados de los múltiples triángulos que se pueden formar con sólo utilizar el dedo como el tercer vértice y que al moverse va modificando la longitud de los otros dos lados y los ángulos; cambiando así la clase de triángulo de acuerdo con la longitud de los lados y sus ángulos. En el recorrido del dedo al moverse se puede observar como se forman infinitos triángulos escalenos, pero sólo de uno a tres isósceles dependiendo de la longitud de la cuerda y por tanto de la altura del triángulo. Y el alumno puede intuir asimismo que el triángulo equilátero no está en ese recorrido, que es una "rara avis" que sólo se puede encontrar sustituyendo la cuerda por una gomilla y moviendo el dedo sobre la mediatriz de la base, de manera que el alumno ve cómo se forman muchos triángulos isósceles e intuir que uno de ellos – sólo uno- será el equilátero.
De la misma forma, también el alumno puede observar que si nos fijamos en los ángulos, hay multitud de triángulos obtusángulos, y que en el recorrido del dedo se pueden formar triángulos en los que poco a apoco el ángulo obtuso se va acercando al ángulo recto y formar así en un punto de ese recorrido -y sólo en él- un triángulo rectángulo, para intuir también que al mover el dedo los triángulos

serán a partir de ahí acutángulos, hasta el punto en el que otra vez es rectángulo, para a partir de ahí volver a ser obtusángulos.
También en la experiencia de aula que representa los triángulos isoperimétricos nos encontramos las mismas o parecidas aportaciones que el movimiento de las figuras supone en relación con el desarrollo de la capacidad de intuición de los alumnos, junto a la idea curricular de que los diferentes tipos de triángulos no son figuras aisladas sino que están relacionadas entre sí. Pero lo bueno del uso de este tipo de materiales es que el aprendizaje no sólo se refiere a conceptos previamente establecidos, sino que la propia experiencia va aportando conceptos no previstos inicialmente; porque al igual que en el caso de los paralelogramos se puede introducir la idea intuitiva del concepto de límite, en esta experiencia surgió también un aprendizaje no esperado. Cuando se le planteó a los alumnos que se imaginaran que el maestro sustituyera su dedo por una tiza que fuera dibujando una línea a medida que se movía, nos encontramos con una línea que todos coincidían en que era curva, ¿pero era un arco de una circinferencia? ¿si era así cuál era esa circunferencia? ¿Dónde estaba su centro? Y como ya sabemos acerca de la tozudez y tenacidad de los alumnos ante las búsquedas imposibles, es por lo que la experiencia sirvió para que descubrieran que esa línea curva era un arco de la elipse, una línea curva que tiene no uno, sino dos centros que eran las dos puntas clavadas en el tablero...
A veces las experiencias educativas no sólo tienen un aspecto curricular evidente, sino también otros aspectos que se refieren a lo que me gusta denominar como el mundo de las emociones en el aprendizaje. Porque el descubrimiento de la elipse no estaba previsto en el diseño inicial de la experiencia, sino que apareció en su puesta en práctica. Quizás debamos hablar en términos emocionales de iluminación o inspiración. O quizás sólo se deba al recuerdo infantil de cuando mi maestro nos sacó ese día al patio de recreo y clavó dos estacas en la arena y con una cuerda dibujó en el suelo ante nuestros ojos atónitos aquella figura curva que no era una circunferencia porque tenía dos centros. Un recuerdo infantil que la película *Ágora* de Alejandro Amenábar y dedicada a la figura de *Hipatia de Alejandría,* me devolvió cuando su protagonista para resolver el problema matemático al que venía dando vueltas en su cabeza, clavó en la arena dos antorchas y dibujó en el suelo con una cuerda una elipse de la misma manera que yo había visto hacer a mi maestro.